45. アル種ノRiemann面ノ等角描寫ニツイテ

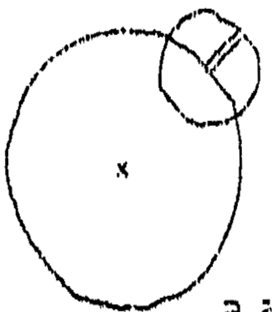
小林善一（東京高師）

今春ノ數物總會デアル種ノRiemann面ニ対スル一点ヲ除イタ一枚ノ全平面ニ等角ニ描寫デキル爲ノ一ツノ十分條件ヲ述ベタ。

今Riemann面Fガ

I　Fニ屬スル円板(單葉又ハ複葉)ヲ作ルトキ一点ヲ除ケバスベテ此ノ内点ガFニ屬スルナラバ此ノ一点モ亦Fニ屬スル。

II　Fノ單葉円板Dノ周上ニアルRand-pointハ之ヲ中心トシ半徑ニ副ツテ切斷ノアルFノ切斷円板ガ作レル。但シ切線ハDノ周ト直角ニ外方ニ向フモノトスル。



III　Fハ單一連結デアル。

ヲ滿足スルモノトシ之ヲ(K)-classト呼バウ。

周ニ少クトモ二ツノ特異点ノアル円板(單葉)ヲ生産円板ト呼ビソノ特異点(有限ノモノ)カラ円板ノ中心ニ引イタ直線ヲ生産矢線ト呼ブコトニスル。

生産円板ノ球面中心(円板ノ球面射影デ生ズル球面円板ノ中心ニ対應スル点)ノ軌跡ハ連結的ナ線系デアル。之ヲSトスル。Fヲ位相変換ニヨツテ一点ヲ除イタ全平面ニ描写スルトキSノ描写ヲTトシTヲ、位相樹木ト呼ブコトニスル。位相樹木ノ弧ノ角長トハ対應スル二円板ノ分岐点ヲ共有スル生産矢線ノ間ノ角ヲ基トシテ測ルコトトシTノ任意ノ点tヲ定点t_0ニ結ブTノ單一曲線ノ角長ノ

最小ヲモツテt ノ t_0 カラノ角距離ト呼ブコトトスル。

t_0 カラ θ ナル角距離ニアルTノ点ノ数ヲ $\mu(\theta)$，又

$$\lambda(\bar{\theta}) = \max_{\theta \leqq \bar{\theta}} \mu(\theta)$$

トオク。又 $\theta < \bar{\theta}$ ニアルTノ角長ノ和ヲ $\rho(\bar{\theta})$ トスレバ

$$\rho(\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \mu(\theta)\, d\theta \leqq \bar{\theta}\lambda(\bar{\theta})$$

定理 I. (K)-class ノ Riemann 面 F ニ於テ $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta\lambda(\theta)}$ ガ発散スレバ F ハ抛物的デアル。

ガ成立スル。春ノ報告ノ際、F ノ無限遠点ニハ特異点ノナイコト及ビ t_0 ニ対応スル生産円板ノ中心ガ有限ニアルコト等ノ條件ハ取リ去リ得ル。

尚コノ定理デハ或ル種ノ楕円函数例ヘバ snz ノ逆函数ノ Riemann 面ニハ効力ガ及バナイ。

進ンデ

定理 II (K)-class ノ Riemann 面 F ニ於テ $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\rho(\theta)}$ ガ発散スレバ F ハ抛物的デアル

ガ証明デキル様デアル。之ダト I ヨリ多少有力デアルガ前記ノ例ニ効果ノ及バナイコトハ前ト同様デアル。

定理 II ノ証明ノ概要ハ次ノ通リデアル。

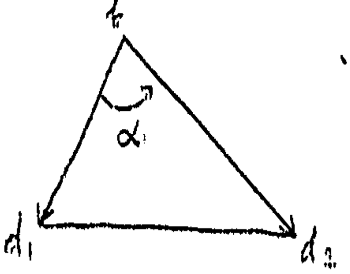
面 F ヲ次ノ線ニヨツテ三角形又ハ二角形範囲ニ分ケル。

1° 生産中心ノ軌跡

2° 定円板 D_0 (t_0 ニ対応スルモノ) ノスベテノ生産矢線

3° 節円板（周ニ三以上ノ分岐的ノアルモノ）ノスベテノ生産矢線

4° 極限円板（樹木TノD節点，定点t_0ヲ含マヌ単一弧上デt_0カラノ角距離ノ最大ナルモノニ対応スル円板）ノスベテノ生産矢線



ソノ中ノ一ツ bd_1d_2 ヲトル。

$$\begin{cases} b\,; & \text{分岐点} \\ bd_1,\ bd_2\,; & 2°,\ 3°,\ 4°\ \text{ノ何レカニ属スル矢線} \\ d_1d_2\,; & 1°\ \text{ノ部分} \end{cases}$$

D_0カラノ角距離θヲ増加スルニツレテ対応スル矢線ガbヲ中心トシテ反時計廻リヲナスモノヲ（+）類，時計廻リヲナスモノヲ（−）類ト呼バウ。（+）類ニ於テハ

(1) $$y = \log(w-b) + (m-a)i$$

但シ
$$\begin{cases} w\,: & F\text{ノ複素平面ヲ表ハス数} \\ a = \mathrm{Amp}\,(d_1-b) & \\ m\,: & bd_1\ \text{ノ}\ D_0\ \text{カラノ角距離} \end{cases}$$

ニヨツテ $\triangle bd_1d_2$ ヲ $m < \mathfrak{J}(y) < m+\alpha$ ニ描写スル。（−）類ノ $\triangle bd_1d_2$ ヲトルトキ

(2) $$y = \overline{\log}\,(w-b) + (m+a)i$$ 但シ $\overline{\log}\,x$ ハ $\log x$ ノ共軛函数

ニヨツテ $m < \mathfrak{J}(y) < m+\alpha$ ニ描写スル。

Fハ(1)又ハ(2)ニヨツテ部分的等角（角ノ対応ハ±ニ様）ニ壔状面Yニ描写サレル。次ニ F ヲ

$$z = Z(w)$$

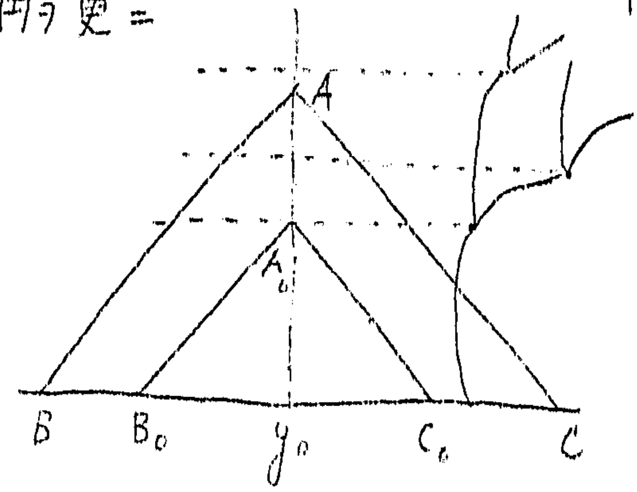
ニヨツテ、$|z|<R$ ニ描写シ此ノ円ヲ更ニ

$u = \log z$

ニヨツテ帯状範囲

$0 \leqq \mathfrak{J}(u) < 2\pi$

ニ描写スル。



p_0' ハ定円板 D_0 ノ一矢線上ノ有限点トシ Y上ニハ y_0 ニ、z平面デハ $z=0$ ニ対応スルモノトスル。Yヲ y_0 ヲ斜辺ノ中点トスル直角三角形 ABC デセクレ、ソノ内部ヲ $Q(\theta)$ (但シ $\theta = y_0A$) トスル。セクロハYノ内点ヲ走ル故、$Q(\theta)$ ニハ z-平面デハ $q(\theta)$ ガ、u-平面デハ $q'(\theta)$ ガ対応スルモノトシ之等ノ周ハ夫々内点ヲ走ル。

$q(\theta)$ ハ $z=0$ ヲ含ミ $|z|=R$ ニ含マレル故 $z=0$ ヲ含ム少クトモ一ツノ巡回路ガアル。故ニ $q'(\theta)$ ノ周ハ帯ノ内部ヲ走リ周ノ長サ $l(\theta)$ ハ

(3) $$l(\theta) \geqq 2\pi$$

且 $$l(\theta) = \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right| |dy|$$

デアル。Schwarz ノ不等式ニヨリ

(4) $$4\pi^2 \leqq (l(\theta))^2 \leqq \int_{BAC} |dy| \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right|^2 |dy|$$

然ルニ

(5) $$\int_{BAC} |dy| \leqq 2K_1 \int_0^\theta n(\theta)\, d\theta,$$ 但シ $\begin{cases} K_1 ; \text{常数} \\ n(\theta) \text{ ハ高サ } \theta \text{ ニ於ケルYノ葉数} \end{cases}$

又 $B_0A_0C_0$ 及ビ BAC デカコマレル範圍ニ対応スル帯状範圍ノ面積ヲ $A(\theta)$ トスルト

$$(6) \qquad A(\theta) = K_2 \int_{\theta_0}^{\theta_e} \left\{ \int_{BAC} \left| \frac{du}{dy} \right|^2 |dy| \right\} d\theta$$

K_2 ハ常数
$\theta_0 = y_0 A_0$

デアル。故ニ

$$(7) \qquad \frac{1}{K_2} \frac{dA}{d\theta} = \int_{BAC} \left| \frac{du}{dy} \right|^2 |dy|$$

(4), (5), (7) カラ

$$2\pi^2 \leqq \frac{K_1}{K_2} \int_0^{\theta} n(\theta)\, d\theta \times \frac{dA}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{K_3}{\int_0^{\theta} n(\theta)\, d\theta} \leqq \frac{dA}{d\theta}$$

K_3 ハ常数

$$\therefore \quad K_3 \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \frac{1}{\int_0^{\theta} n(\theta)\, d\theta} \right\} d\theta \leqq A(\theta) \leqq 2\pi (\log R - \log R_0)$$

$$R_0 = \min_{y \text{ on } A_0B_0C_0} |z|$$

故ニ $\int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \frac{1}{\int_0^{\theta} n(\theta)\, d\theta} \right\} d\theta$ ガ發散スレバ F ハ抛物的デアル。

シカルニ F ニ於ケル節デナイ生産円板ノ分岐点ガ二ツ共有限ナラバ矢線ハ二ツ, 一ツダケ有限ナラバ一ツデアルカラ、

$$\mu(\theta) \leqq n(\theta) \leqq 2\mu(\theta)$$

$$\therefore \quad \rho(\theta) = \int_0^{\theta} \mu(\theta)\, d\theta \leqq \int_0^{\theta} n(\theta)\, d\theta \leqq 2 \int_0^{\theta} \mu(\theta)\, d\theta.$$

9年10月18日 受取。